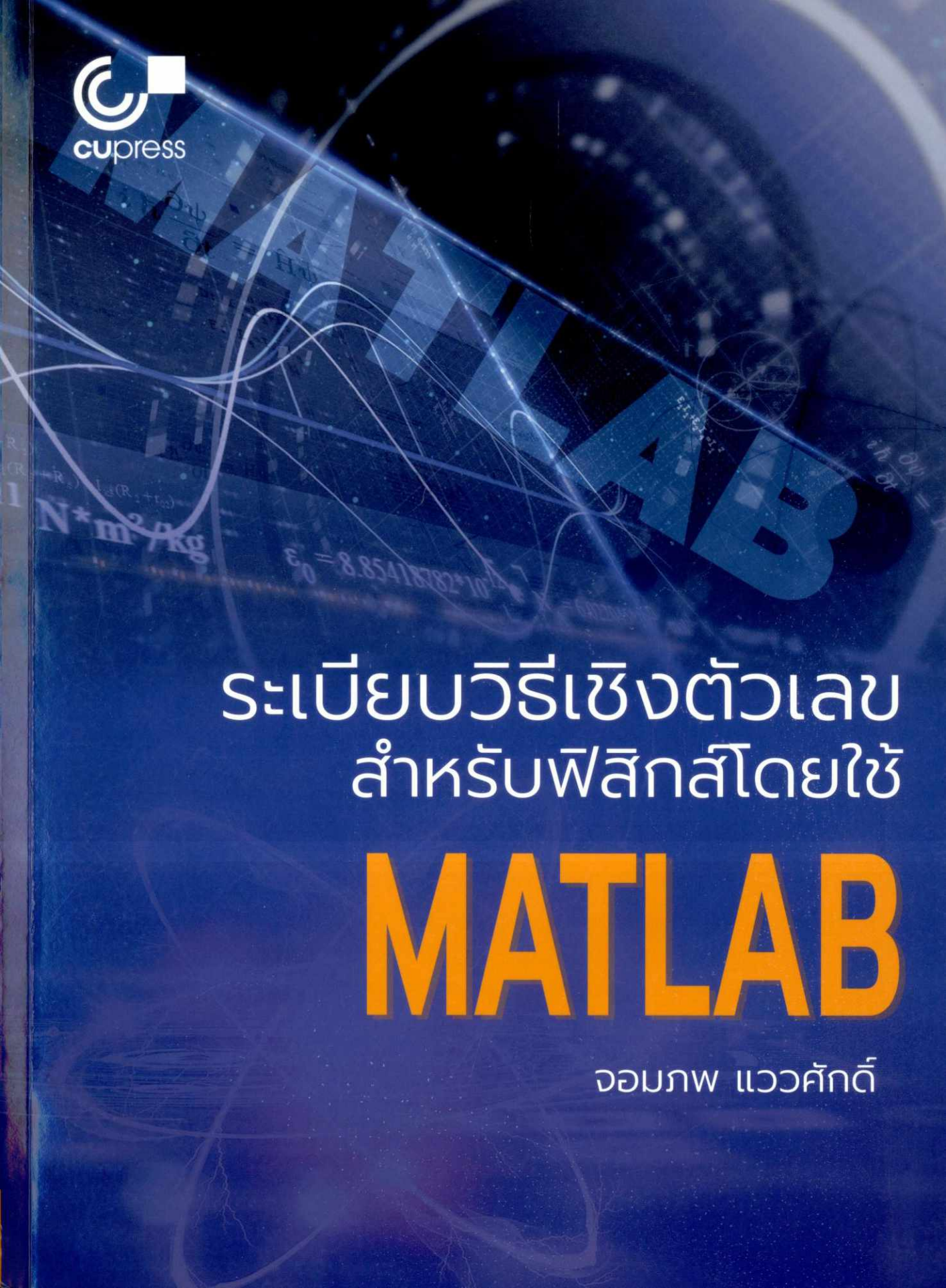

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สำหรับฟิสิกส์โดยใช้ MATLAB

จอมภพ แววศักดิ์

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ง
รายการรูป	ฑ
รายการตาราง	ป
บทที่ 1 บทนำ (Preliminaries)	1
1.1 บทนำ (Introduction)	2
1.2 การเขียนโปรแกรม (Programming)	3
1.3 พื้นฐานความรู้เกี่ยวกับ MATLAB (Basic Elements of MATLAB)	3
1.3.1 ตัวแปร (Variables)	3
1.3.2 คณิตศาสตร์ (Mathematics)	5
1.3.3 การวนรอบและเงื่อนไข (Loops and Conditions)	6
1.3.4 ตัวดำเนินการโคลอน (Colon Operator)	8
1.3.5 อินพุท เอาท์พุทและกราฟิก (Input Output and Graphic)	10
1.3.5.1 อินพุท (Input)	10
1.3.5.2 เอาท์พุท (Output)	10
1.3.5.3 กราฟิก (Graphic)	11
1.4 โปรแกรมและฟังก์ชัน (Programs and Functions)	12
1.4.1 โปรแกรมออโธโกนอลลิตี้ใน MATLAB (Orthogonality Program)	12
1.4.2 การประมาณค่าในช่วงใน MATLAB (Interpolation in MATLAB)	15
1.5 ความผิดพลาดเชิงตัวเลข (Numerical Errors)	19
1.5.1 ความผิดพลาดเนื่องจากพิสัย (Range Error)	19
1.5.2 ความผิดพลาดเนื่องจากการปัดเศษ (Round-Off Error)	21
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	23

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ตอนที่ 1 ระเบียบวิธีขั้นพื้นฐาน (Ordinary Differential Equations I: Basic Methods)	25
2.1 บทนำ (Introduction)	26
2.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ (Projectile Motion)	26
2.2.1 สมการพื้นฐานสำหรับการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ (Basic Equations for Projectile Motion)	26
2.2.2 อนุพันธ์แบบก้าวหน้า (Forward Derivative)	29
2.2.3 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler Method)	30
2.2.4 ระเบียบวิธีของออยเลอร์-โครเมอร์และระเบียบวิธีแบบจุดกึ่งกลาง (Euler-Cromer and Midpoint Methods)	33
2.2.5 ความผิดพลาดโลคอล (Local Error)	34
2.2.6 ความผิดพลาดโกลบอล (Global Error)	34
2.2.7 การเลือกขั้นเวลา (Choosing Time Step)	35
2.2.8 โปรแกรมเบสบอล (Baseball Program)	35
2.3 เพนดูลัมอย่างง่าย (Simple Pendulum)	41
2.3.1 สมการพื้นฐานสำหรับเพนดูลัมอย่างง่าย (Basic Equations for Simple Pendulum)	41
2.3.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบศูนย์กลาง (Centered Derivative Formulas)	44
2.3.3 ระเบียบวิธีของลีพ-ฟรอกและเวอร์เล็ต (Leap-Frog and Verlet Methods)	45
2.3.4 โปรแกรมลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย (Simple Pendulum Program)	49
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	57
บทที่ 3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ตอนที่ 2 ระเบียบวิธีขั้นสูง (Ordinary Differential Equations II: Advanced Methods)	60
3.1 บทนำ (Introduction)	61

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.2 วงโคจรของดาวเคราะห์ (Orbits of Comets)	61
3.2.1 สมการพื้นฐานสำหรับการคำนวณเกี่ยวกับวงโคจรของดาวเคราะห์ (Basic Equations for Orbits of Comets)	61
3.2.2 โปรแกรมวงโคจร (Orbit Program)	65
3.3 ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Methods)	76
3.3.1 ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสอง (Second Order Runge-Kutta)	76
3.3.2 สมการทั่วไปสำหรับระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา (General Runge-Kutta Formulas)	79
3.3.3 ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (Fourth-Order Runge-Kutta)	81
3.3.4 การส่งผ่านฟังก์ชันไปยังฟังก์ชัน (Passing Functions to Functions)	83
3.4 ระเบียบวิธีอะแดพทีฟ (Adaptive Methods)	84
3.4.1 โปรแกรมขั้นเวลาแบบอะแดพทีฟ (Adaptive Time Step Programs)	84
3.4.2 ฟังก์ชันรุงเง-คุตตาแบบอะแดพทีฟ (Adaptive Runge-Kutta Function)	86
3.5 รูปแบบที่ค้นพบได้ยากในแบบจำลองของลอเรนซ์ (Chaos in the Lorenz Model)	89
3.5.1 กลวัตรจักรภพที่หยุดหมุน (Unwinding the Mechanical Universe)	89
3.5.2 โปรแกรมแบบจำลองของลอเรนซ์ (Lorenz Model Program)	90
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	96
บทที่ 4 การแก้ระบบสมการ (Solving Systems of Equations)	100
4.1 บทนำ (Introduction)	101
4.2 ระบบสมการเชิงเส้น (Linear Systems of Equations)	101

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
4.2.1 สถานะคงตัวของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Steady States of ODEs)	101
4.2.2 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian Elimination)	103
4.2.3 การหมุน (Pivot)	105
4.2.4 ตัวกำหนด (Determinant)	107
4.2.5 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ใน MATLAB (Gaussian Elimination in MATLAB)	108
4.3 เมตริกซ์ผกผัน (Matrix Inverse)	109
4.3.1 ระเบียบวิธีเมตริกซ์ผกผันและระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Matrix Inverse and Gaussian Elimination)	109
4.3.2 เมตริกซ์ซิงกูลาร์และเมตริกซ์เงื่อนไขใกล้ซิงกูลาร์ (Singular and ill-Conditioned Matrices)	111
4.3.3 ตัวสั่นฮาร์โมนิคแบบคู่ควบ (Coupled Harmonic Oscillator)	113
4.4 ระบบสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Systems of Equation)	115
4.4.1 ระเบียบวิธีของนิวตันแบบหนึ่งตัวแปร (One-Variable Newton's Method)	115
4.4.2 ระเบียบวิธีของนิวตันแบบหลายตัวแปร (Multivariable Newton's Method)	117
4.4.3 โปรแกรมระเบียบวิธีของนิวตัน (Newton's Program)	118
4.4.4 ความต่อเนื่อง (Continuation)	121
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	122
บทที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูล (Analysis of Data)	129
5.1 บทนำ (Introduction)	130
5.2 การสร้างเส้นกราฟตัวแทนของชุดข้อมูล (Curve Fitting)	130
5.2.1 สภาวะโลกร้อน (Global Warming)	130

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
5.2.2 ทฤษฎีทั่วไป (General Theory)	132
5.2.3 การถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression)	133
5.2.4 การสร้างกราฟตัวแทนของชุดข้อมูลแบบเชิงเส้นทั่วไป โดยอาศัยวิธีกำลังสองน้อยสุด (General Least Square Fit)	137
5.2.5 การเป็นตัวแทนที่ดีของเส้นกราฟ (Goodness of Fit)	139
5.2.6 การวนรอบเพื่อสร้างเส้นกราฟตัวแทนของชุดข้อมูล (Curve Fit Routine)	140
5.3 การวิเคราะห์สเปคตรัม (Spectral Analysis)	149
5.3.1 การแปลงฟูเรียร์แบบช่วง (Discrete Fourier Transform)	149
5.3.2 การกำจัดสัญญาณรบกวนและความถี่ไนควิสซ์ (Aliasing and Nyquist Frequency)	155
5.3.3 การแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว (Fast Fourier Transform)	157
5.3.4 การแปลงฟูเรียร์แบบเร็วทำงานอย่างไร (How the FFT Works)	158
5.4 โหมดปกติ (Normal Modes)	164
5.4.1 ระบบมวลคู่ควบ (Coupled Mass System)	164
5.4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Results)	167
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	174
บทที่ 6 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ตอนที่ 1 รากฐานและระเบียบวิธีชัดแจ้ง (Partial Differential Equations I: Foundation and Explicit Methods)	177
6.1 บทนำ (Introduction)	178
6.2 บทนำสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Introduction to PDEs)	178
6.2.1 การจำแนกชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Classification of PDEs)	178
6.2.2 ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial Value Problems)	180
6.2.3 ปัญหาค่าขอบ (Boundary Value Problems)	183

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6.3 สมการการแพร่ (Diffusion Equation)	184
6.3.1 ระเบียบวิธีทางภาพ (Methods of Image)	184
6.3.2 ระเบียบแบบแผนปริภูมิศูนย์กลาง–เวลาอนาคต (Forward Time Centered Space Scheme)	188
6.3.3 โปรแกรม FTCS (FTCS Program)	189
6.4 มวลวิกฤต (Critical Mass)	195
6.4.1 โครงการแมนฮัตตัน (Manhattan Project)	195
6.4.2 การแพร่ของนิวตรอน (Neutron Diffusion)	195
6.4.3 การแยกตัวแปร (Separation of Variables)	196
6.4.4 โปรแกรมการแพร่นิวตรอน (Neutron Diffusion Program)	198
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	204
บทที่ 7 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ตอนที่ 2 ระเบียบวิธีชัดแจ้งขั้นสูง (Partial Differential Equations II: Advanced Explicit Methods)	207
7.1 บทนำ (Introduction)	208
7.2 สมการการพาในแนวราบ (Advection Equation)	208
7.2.1 สมการการพาในแนวราบและสมการคลื่น (Wave and Advection Equations)	208
7.2.2 ผลเฉลยของสมการการพาในแนวราบ (Solution of the Advection Equation)	211
7.2.3 ระเบียบวิธี Forward Time Centered Space (FTCS) สำหรับสมการการพาในแนวราบ (FTCS Method for Advection Method)	212
7.2.4 ระเบียบวิธีของแลกซ์สำหรับสมการการพาในแนวราบ (Lax Method for Advection Method)	218
7.2.5 ระเบียบแบบแผนของแลกซ์-เวนดรอฟ (Lax-Wendroff Scheme)	220

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
7.3 ฟิสิกส์ของการไหลของการจราจร (Physics of Traffic Flow)	223
7.3.1 กลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics)	223
7.3.2 การไหลของการจราจร (Traffic Flow)	225
7.3.3 การจราจร ณ ตำแหน่งสัญญาณไฟหยุด (Traffic at a Stoplight)	227
7.3.4 โปรแกรมการจราจร (Traffic Program)	231
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	242
บทที่ 8 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ตอนที่ 3 ระเบียบวิธีผ่อนปรนและระเบียบวิธีสเปคตรัม (Partial Differential Equations III: Relaxation and Spectral Methods)	247
8.1 บทนำ (Introduction)	248
8.2 ระเบียบวิธีผ่อนปรน (Relaxation Methods)	248
8.2.1 การแยกของตัวแปร (Separation of Variables)	248
8.2.2 ระเบียบวิธีจาโคบี (Jacobi Method)	252
8.2.3 เกาส์-ไซเดลและการเหนือการผ่อนปรนแบบพร้อมกัน (Gauss-Seidel and Simultaneous Overrelaxation)	255
8.2.4 สมการปัวซง (Poisson Equation)	261
8.3 ระเบียบวิธีสเปคตรัม (Spectral Methods)	262
8.3.1 ระเบียบวิธีกาเลอร์คินแบบฟูเรียร์ (Fourier Galerkin Method)	262
8.3.2 ตัวอย่างไดโพล (Dipole Example)	266
8.3.3 ระเบียบวิธีการแปลงฟูเรียร์แบบหลายช่วง (Multiple Fourier Transform (MFT) Method)	268
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8	275
บทที่ 9 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ตอนที่ 4 ความคงตัวและระเบียบวิธีปริยาย (Partial Differential Equations IV: Stability and Implicit Methods)	278
9.1 บทนำ (Introduction)	279

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
9.2 การวิเคราะห์ความเสถียร (Stability Analysis)	279
9.2.1 เสถียรภาพของ Von Neumann (Von Neumann Stability)	279
9.2.2 เสถียรภาพของ FTCS สำหรับสมการการพาในแนวราบ (Stability of FTCS for the Advection Equation)	280
9.2.3 เสถียรภาพของระเบียบแบบแผนของแลกซ์ (Stability of the Lax Scheme)	282
9.2.4 เสถียรภาพของเมตริกซ์ (Matrix Stability)	283
9.2.5 ระเบียบวิธีกำลัง (Power Method)	286
9.3 ระเบียบแบบแผนไม่ชัดแจ้ง (Implicit Schemes)	289
9.3.1 สมการชโรดิงเงอร์ (Schrödinger Schemes)	289
9.3.2 ระเบียบแบบแผนไม่ชัดแจ้ง (Implicit Schemes)	291
9.3.3 กลุ่มคลื่นสำหรับอนุภาคอิสระ (Wave Packet for a Free Particle)	294
9.3.4 โปรแกรม Crank-Nicholson สำหรับอนุภาพอิสระ (Crank-Nicholson Program for a Free particle)	295
9.4 เมตริกซ์สปารซ์ (Sparse Matrices)	299
9.4.1 สมบัติทั่วไป (General Properties)	299
9.4.2 เมตริกซ์สามแนวเฉียง (Tridiagonal Matrices)	300
9.4.3 Crank-Nicholson สำหรับเมตริกซ์สามแนวเฉียง (Crank-Nicholson for Tridiagonal Matrices)	302
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9	308
บทที่ 10 ฟังก์ชันพิเศษและควอดราเชอร์ (Special Function and Quadrature)	312
10.1 บทนำ (Introduction)	313
10.2 ฟังก์ชันพิเศษ (Special Function)	313
10.2.1 ฟังก์ชันไอเกน (Eigenfunctions)	313
10.2.2 พหุนามของเลอจองด์ (Legendre Polynomials)	315

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
10.2.3 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Functions)	318
10.2.4 ค่าศูนย์ของฟังก์ชันเบสเซล (Zeros of the Bessel Function)	321
10.3 ปริพันธ์เชิงตัวเลขขั้นพื้นฐาน (Basic Numerical Integration)	327
10.3.1 สมการลาปลาซในพิกัดทรงกลม (Laplace Equation in Spherical Coordinates)	327
10.3.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)	329
10.3.3 การปริพันธ์ของรอมเบิร์ก (Romberg Integration)	332
10.3.4 การวนรอบการปริพันธ์ของรอมเบิร์ก (Romberg Integration Routine)	334
10.3.5 ทำไมระเบียบแบบแผนของรอมเบิร์กถึงใช้งานได้ดี (Why Romberg Works)	335
10.4 ควอดราเชอร์แบบเกาส์ (Gaussian Quadrature)	336
10.4.1 แนวคิดพื้นฐาน (Basic Idea)	336
10.4.2 กฎของเกาส์-เลอจองด์แบบสามจุด (Three-Point Gauss-Legendre Rule)	337
10.4.3 ทฤษฎี Perturbation ควอนตัม (Quantum Perturbation Theory)	339
10.4.4 อนุภาคในกระป๋อง (Particle in a Can)	342
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 10	345
บทที่ 11 ระเบียบวิธีสโตคาสติก (Stochastic Methods)	349
11.1 บทนำ (Introduction)	350
11.2 ทฤษฎีจลน์ (Kinetic Theory)	350
11.2.1 พลศาสตร์โมเลกุล (Molecular Dynamics)	350
11.2.2 การกระจายแบบแมกซ์เวลล์-โบลท์มานน์ (Maxwell-Boltzmann Distribution)	352
11.2.3 ความถี่ของการชนและวิถีอิสระเฉลี่ย (Collision Frequency and Mean Free Path)	356

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
11.3 ตัวกำเนิดจำนวนสุ่ม (Random Number Generators)	358
11.3.1 การเบี่ยงเบนแบบคงรูป (Uniform Deviates)	358
11.3.2 การแจกแจงแบบผันกลับไม่ได้ (Invertible Distributions)	359
11.3.3 การแจกแจงแบบกลุ่ม (Discrete Distributions)	363
11.3.4 การยอมรับ-การปฏิเสธ (Acceptance-Rejection)	366
11.4 การจำลองแบบทางตรงมอนติคาร์โล (Direct Simulation Monte Carlo)	368
11.4.1 อัลกอริธึมทั่วไป (General Algorithm)	368
11.4.2 การชน (Collision)	369
11.4.2 โปรแกรม DSMC (DSMC Program)	372
11.5 สถานะอสมดุล (Non-Equilibrium States)	377
11.5.1 สถานะคงที่ (Steady State)	377
11.5.2 ความหนืด (Viscosity)	380
11.5.3 โปรแกรมอสมดุล DSMC (Non-Equilibrium Program)	383
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 11	394
เอกสารอ้างอิง	397
ดัชนี (Index)	